ブール代数 $\mathcal{P}(\omega_1)$/fn と $\mathcal{P}(\omega)$/fn との同型問題(位相空間論と集合論の研究)

加藤, 昭男

数理解析研究所講究録
584巻 1986年 27-36

ブール代数 $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{fin}$ と $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ との同型問題

防衛大 加藤昭男
(Akio Kato)

最近 General Topologists の間で $\omega_1^* = \beta\omega_1 \setminus \omega_1$ と $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ とは同相になり得るか、という問題がにわかに脚光を浴びてきた。この小論では、この問題に対する "one small step" として、random real extension に於ては答えは否定的であることを示す。

§1. Introduction Cardinal κ に対し $\kappa^* = \beta\kappa \setminus \kappa$ は、discrete space κ の Stone-Čech compactification $\beta\kappa$ の remainder を表わす。$\beta\kappa$ は power set $\mathcal{P}(\kappa)$ of κ の Stone space であり、κ^* は、$\mathcal{P}(\kappa)$ を finite sets の ideal で割って得られる商ブール代数 $\mathcal{P}(\kappa)/\mathrm{fin}$ の Stone space に一致する。従って ω_1^* と ω^* が同相になるか、という問題は、ブール代数 $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{fin}$ と $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ が同型になるか、という問題と同じであり、本質的に

集合論的性格を持っている。なお一般の cardinals κ, λ についての同様の問題は否定的に解決されており、我々の問題のみが未解決として残されている [1]。即ち、

$$\kappa > \lambda \geq \omega,\ \kappa^* \cong \lambda^* \quad \longrightarrow \quad \kappa = \omega_1\ \&\ \lambda = \omega$$
$$\left(\text{i.e. } \mathcal{P}(\kappa)/fin \approx \mathcal{P}(\lambda)/fin\right)$$

§2. Similarity　$\mathcal{P}(\omega_1)/fin \approx \mathcal{P}(\omega)/fin$ が成立するならば $2^{\omega_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)/fin| = |\mathcal{P}(\omega)/fin| = 2^{\omega}$ であるから、我々は条件 $2^{\omega_1} = 2^{\omega}$ が成立する時にのみ関心がある。(例えば連続体仮説 CH が成立する状況は除外される。)

この必要条件 $2^{\omega_1} = 2^{\omega}$ は、ブール代数の構造を全く無視することにより得られたものであるが、実は意外と無視していないということが次の定理よりわかる。

定理 1. 次は equivalent である。

(1) $2^{\omega_1} = 2^{\omega}$

(2) Homeomorphic embedding $\omega_1^* \hookrightarrow \omega^*$ が存在する。
i.e. Homomorphism, onto $\mathcal{P}(\omega_1)/fin \twoheadleftarrow \mathcal{P}(\omega)/fin$ が存在。

(3) $\mathcal{P}(\omega_1)/fin \approx \mathcal{P}(\omega)/I$ となる ideal I of $\mathcal{P}(\omega)$ で finite sets を含むものが存在する。

(証明)　(2)→(3)は明らか。(3)→(1)は、$2^{\omega_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)/fin| = |\mathcal{P}(\omega)/I| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^{\omega}$ より従う。(1)→(2)を示すには、$2^{\omega_1} = \mathfrak{c}\ (= 2^{\omega})$ のとき $\beta\omega_1 \hookrightarrow \beta\omega$ となることを示せば十分であるが、$\beta\omega_1$ は extremally disconnected であることに注意すれば次のよく知られた結果から従う。

<u>Fact. 1.</u>　Extremally disconnected compact T_2 space X of weight $\leq \mathfrak{c}$ は、ω^* の中に homeomorphic に embed される。すなわち、complete Boolean alg. B of card. $\mathfrak{c}$ は Boolean alg. $\mathcal{P}(\omega)/fin$ の homomorphic image になる。

これは Efimov の結果だが、本質的には Sikorski extension theorem による（[5] 参照）。

なお、この定理1 (3)において、ideal I を σ-ideal に選べるかどうかはまだわかっていない。Martin's Axiom を仮定すれば σ-ideal に選ぶことは可能である（[5]）。

<u>定理 2.</u>　ω_1^* 及び ω^* は共に homeomorph of $\mathfrak{c} \times \omega^*$ を dense に含む。従って、ω_1^* 及び ω^* の regular open sets 全体のつくるブール代数は同じである。すなわち、$\mathcal{P}(\omega_1)/fin$ 及び $\mathcal{P}(\omega)/fin$ の completion は一致する。

この定理は、countable sets から成る maximal almost disjoint collection of card. ϕ をみつけることにより容易に証明される。詳細は読者にゆだねる。

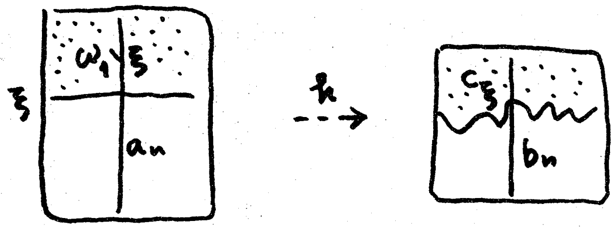
§3. A Breakthrough　問題の解決に一歩踏み出したのは Frankiewicz & Balcar [3] による次の結果である。

定理3. $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$ が $\mathcal{P}(\omega)/fin$ の中に embed されるならば、ω から ω への関数全体 ${}^{\omega}\omega$ の中に ω_1-scale が存在する。

(${}^{\omega}\omega$ の中に $f < g \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \exists_{m\in\omega} \forall_{n>m}\ f(n) < g(n)$ により order を入れたとき、$S \subseteq {}^{\omega}\omega$ が ω_1 に order isomorphic であり、$\forall_{f\in {}^{\omega}\omega} \exists_{g\in S}\ f < g$ となっているとき、S を ω_1-scale という。)

(証明)　$h : \mathcal{P}(\omega_1)/fin \to \mathcal{P}(\omega)/fin$ を embedding とする。ω_1 の分割 $\omega_1 = \bigoplus_{n\in\omega} a_n$, $|a_n| = \omega_1$ を考え、これにより対応する ω の分割を $\omega = \bigoplus_{n\in\omega} b_n$ とする。すなわち $h([a_n]) = \langle b_n \rangle$ である。($a \in \mathcal{P}(\omega_1)$, $b \in \mathcal{P}(\omega)$ に対応する equivalence class in $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$, $\mathcal{P}(\omega)/fin$

をそれぞれ $[a]$, $\langle b \rangle$ で表わすことにする。) 各 $\xi < \omega_1$ に対し $h([\omega_1 \setminus \xi]) = \langle c_\xi \rangle$, $c_\xi \subseteq \omega$ とすると, $[a_n] \cdot [\omega_1 \setminus \xi] > 0$ より $\langle b_n \rangle \cdot \langle c_\xi \rangle > 0$. 各 $\xi < \omega_1$ に対し $f_\xi \in {}^\omega\omega$ を $f_\xi(n) = \mathrm{Min}(b_n \cap c_\xi)$ により定めれば $\xi < \eta < \omega_1$ の時 $f_\xi < f_\eta$ in ${}^\omega\omega$ となる。よって、$\{f_\xi : \xi < \omega_1\}$ から求める ω_1-scale が得られる。



§4. Aspects in Models　今までの考察から、もし $\mathcal{P}(\omega_1)/fin \approx \mathcal{P}(\omega)/fin$ ならば条件

$$(*) \quad 2^{\omega_1} = 2^{\omega} \ \& \ \exists\, \omega_1\text{-scale in } {}^\omega\omega$$

が成立しなければならない。この条件が成立する model of ZFC として最もシンプルなのは、いわゆる random real extension である。よって、この model の中で $\mathcal{P}(\omega_1)/fin \approx \mathcal{P}(\omega)/fin$ が成立するか否かを調べてみる。答えは否定的である。

<u>定理4</u>. Model M of CH に ω_2 個の random reals を add した extension $M[G]$ においては embedding $\mathcal{P}(\omega_1)/fin \hookrightarrow \mathcal{P}(\omega)/fin$ は存在しない。

(証明)　$M \models CH$ とする。"ω_2 個の random reals を add する" とは、Cantor space 2^I where $I = \omega_2$ の中に標準的な probability measure を入れ、Baire subsets 全体を ideal of null sets で割った商ブール代数 $B(I) = \mathrm{Baire}(2^I)/\mathrm{null}$ による extension を考えることである。　G を M-generic filter in $B(I)$ とし、

$M[G] \models$ "$\exists \varphi : \mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{fin} \to \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ embedding"

(emb. = 1-1, into, homomorph.) と仮定するとき矛盾を導く。

各 $\xi < \omega_1$ に対し $\varphi([\xi]) = \langle c_\xi \rangle$ とおき、

$$J_1 \triangleq \{[\xi] : \xi \in \omega_1\} \subseteq \mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{fin}$$

$$J_0 \triangleq \{\langle c_\xi \rangle : \xi \in \omega_1\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$$

と定める。　$\varphi(J_1) = J_0$.　φ は embedding であるから

$$\xi < \eta \to \langle c_\xi \rangle \leq \langle c_\eta \rangle$$

J_0 は $\omega_1 \times \omega$ の subset により決定され、$|\omega_1 \times \omega| = \omega_1$ であることから、subset $I_0 \subseteq I$, $|I_0| = \omega_1$ で

$$J_0 \in M[G_0] \quad \text{where} \quad G_0 \triangleq G \cap B(I_0)$$

なるものがみつかる。　$M[G_0]$ においても CH が成立するから、一般性を失うことなく、初めから

$$J_0 \in M$$

と仮定してよい。

さて、よく知られているように、ω_1 の中においては

ω_2-sequence $\{a_\alpha : \alpha \in \omega_2\}$ of subsets of ω_1 で $\alpha < \beta$ のとき $a_\alpha \supseteq a_\beta$ mod countable, $a_\alpha \setminus a_\beta$ uncountable なるものがとれる。(たとえば closed unbounded sets をとっていき、長さ ω_1 の induction step では diagonal intersection をとればよい。) すなわち、$\mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{fin}$ の中では、$\alpha < \beta$ のとき $[a_\alpha] > [a_\beta]$ mod J_1 である。

$\varphi([a_\alpha]) = \langle b_\alpha \rangle$, $b_\alpha \subseteq \omega$ とおくと φ は embedding ゆえ

$$\alpha < \beta < \omega_2 \longrightarrow \langle b_\alpha \rangle > \langle b_\beta \rangle \text{ mod } J_0 \text{ in } \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$$

このことが $M[G]$ の中で成立しているから

$$\exists p \in G,\ \forall \alpha < \forall \beta < \omega_2 \quad p \Vdash \langle \mathring{b}_\alpha \rangle > \langle \mathring{b}_\beta \rangle \text{ mod. } J_0$$

各 name $\mathring{b}_\alpha \in M^{B(I)}$ は function $\mathring{b}_\alpha : \omega \to B(I)$ だから $\mathrm{rng}(\mathring{b}_\alpha) \subseteq B(I_\alpha)$ となる countable set $I_\alpha \subseteq I$ がとれる。$p \in B(I_p) \subseteq B(I)$, $|I_p| \leq \omega$ とするとき明らかに $I_p \subseteq I_\alpha$ for all $\alpha \in \omega_2$ としてよい。

$M \models CH$ だから collec. $\{I_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ of countable subsets に対し Δ-system lemma が適用できる。従って一般性を失うことなく $\{I_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ は Δ-system with root $K \supseteq I_p$ としてよい([4]参照)。更に、$\exists i \in \omega+1$ $\forall \alpha < \omega_2$ $|I_\alpha \setminus K| = i$ としてよいから、$\forall \alpha, \beta \in \omega_2$ に対し K 上の点を fix する bijection $\pi_{\alpha\beta} : I_\alpha \to I_\beta$ で $\pi_{\beta\alpha} = \pi_{\alpha\beta}^{-1}$ なるものが定まる。$\pi_{\alpha\beta}$, $\pi_{\beta\alpha}$ の両方を extend した

permutation of I を $\tilde{\pi}_{\alpha\beta} : I \to I$ とする。$\pi_{\alpha\beta}, \tilde{\pi}_{\alpha\beta}$ が induce する automorphisms を同じ文字で表わす。

$$\pi_{\alpha\beta} : B(I_\alpha) \to B(I_\beta), \quad \tilde{\pi}_{\alpha\beta} : B(I) \to B(I)$$

ω から $B(I_*)$ where $|I_*| = \omega$ への関数は CH により高々 $\omega_1 = \phi$ 個しかないから、次の diagram が可換となるような $\alpha < \beta < \omega_2$ が存在するはずである。

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\mathring{b}_\alpha"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B(I_\alpha) \arrow[d, "\pi_{\alpha\beta}"] \\
\omega \arrow[r, "\mathring{b}_\beta"'] & B(I_\beta)
\end{tikzcd}$$

これは、$\tilde{\pi}_{\alpha\beta}$ が induce する isomorph. $\tilde{\pi}_{\alpha\beta} : M^{B(I)} \to M^{B(I)}$ を考えれば、$\tilde{\pi}_{\alpha\beta}(\mathring{b}_\alpha) = \mathring{b}_\beta$、$\tilde{\pi}_{\alpha\beta}(\mathring{b}_\beta) = \mathring{b}_\alpha$ となることを示している。よって、$p \Vdash \langle \mathring{b}_\alpha \rangle > \langle \mathring{b}_\beta \rangle \bmod . J_0$ なる関係を $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}$ により写せば

$$\pi_{\alpha\beta}(p) \Vdash \langle \mathring{b}_\beta \rangle > \langle \mathring{b}_\alpha \rangle \bmod . \tilde{\pi}_{\alpha\beta}(J_0)$$

となる。$I_p \subseteq K$ より $\pi_{\alpha\beta}(p) = p$。また $J_0 \in M$ より $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}(J_0) = J_0$ だから

$$p \Vdash \langle \mathring{b}_\beta \rangle > \langle \mathring{b}_\alpha \rangle \bmod . J_0$$

ゆえに、$M[G]$ において $\langle b_\alpha \rangle > \langle b_\beta \rangle \bmod . J_0$ かつ $\langle b_\beta \rangle > \langle b_\alpha \rangle \bmod . J_0$ となり、矛盾である。

(証終)

この証明においては、"random" real の特性は全く使用していないので、この定理の結果は、"random" に限らず一般の reals を add するときにも、その付加の仕方が "side-by-side" すなわち "product" forcing ならば成立する。たとえば Cohen reals を add するときも OK である。しかし Cohen reals の場合は ω_1-scale は存在しない。

定理4の結論は、"topological" に表現すれば、ω^* から ω_1^* の上への continuous map は存在しないということである。上のように automorphisms を利用する証明方法は Kunen により開発されたものである。(Kunen の Doctor 論文参照)。しかし、この方法だと "iterated" forcing の場合は全くわからない。

<u>問題</u>　Iterated random extension のときに定理4が成立するか？　一般に ccc iterated extension のときはどうか？

なお、ブール代数の automorphim を利用した研究として、難波先生によるすぐれた記述（数理科学講究録 No. 480）があるので参照されたい。

《文献》

[1] W.W. Comfort "Compactifications : recent results from several countries" Topology Proc. 2 (1977) 61-87

[2] R. Frankiewicz "Assertion Q distinguishes topologically ω^* & m^*" Coll. Math. 38 (1978) 175-177

[3] R. Frankiewicz, B. Balcar "To distinguish topologically the spaces m^* II" Bull. Polo. Soc. 26 (1978) 521-523

[4] K. Kunen's book "Set Theory" North-Holland (Δ-system lemma については p.49)

[5] K. Kunen "Some points in βN" Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80 (1976) 385-398.